

Relatividad Especial

para Matemáticos novel, con v

Manuel Gutiérrez

Dto. Álgebra, Geometría y Topología

Universidad de Málaga

Málaga, 18 de mayo de 2021

Mecánica

Movimiento de los cuerpos y cómo los observamos

1. Propiedades del medio
2. Propiedades del movimiento

Mecánica

1. Propiedades del medio

Simetrías

Homogeneidad temporal

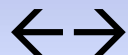
Homogeneidad e isotropía espacial

Observadores

Qué se supone que son

Cómo toman medidas

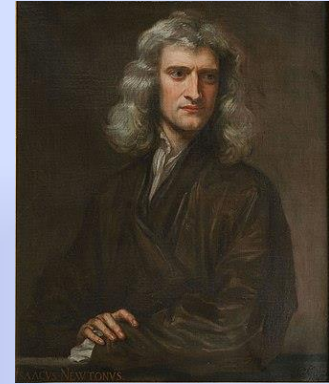
Mundo Físico



Modelo Matemático

Mecánica de Newton

1. Propiedades del medio



Isaac Newton en 1689. Godfrey Kneller.

Simetrías

Homogeneidad temporal

- Dos relojes sincronizados miden el mismo tiempo
- Si no están sincronizados la diferencia es constante

El tiempo es absoluto

Homogeneidad e isotropía espacial

- Las medidas del espacio son iguales no importa el lugar ni la orientación del experimento

El espacio es absoluto (más adelante cambió de opinión)

Mecánica de Newton

1. Propiedades del medio

Observadores

Noción de Observador

- Alguien capaz de hacer medidas de tiempo y espacio

Homogeneidad temporal para un observador

El tiempo es una coordenada en \mathbb{R} .

$$t - s = c$$

Modelo Matemático de Observador

Referencia afín en \mathbb{R}^3

$$R = \{O; B\}$$

$$O \in \mathbb{R}^3 \text{ origen}$$

$$B = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ base ortonormal}$$

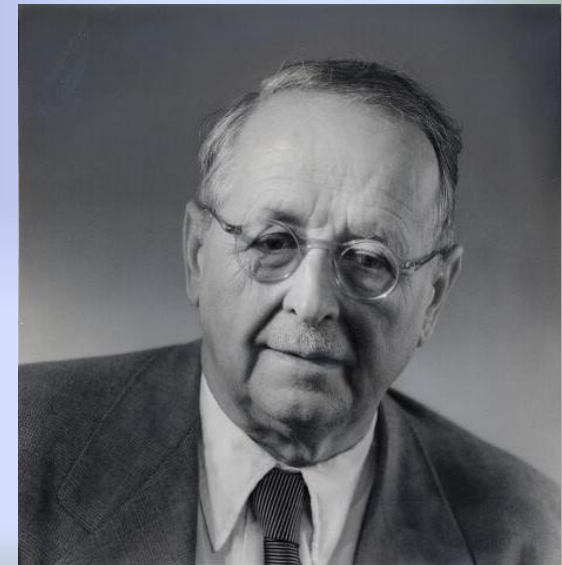
Mecánica de Newton

1. Propiedades del medio

Simetrías

Homogeneidad e isotropía espacial para un observador

El espacio se modela con el espacio afin euclídeo (\mathbb{R}^3, δ) .
Las traslaciones y los giros son isometrías



Mecánica Newtoniana

1. Propiedades del medio

El medio en el que se hace la observación o experimento se llamará laboratorio L

Un Observador se identifica a una referencia ortonormal $R = \{O, B\}$.
Es un isomorfismo afín euclídeo

$$R : \mathbb{R}^3 \rightarrow L$$

Siempre se elige una referencia R_c calibrada al laboratorio

Además un observador dispone de un reloj

Mecánica Newtoniana

1. Propiedades del medio

Dos necesidades Físicas inaplazables

Un observador tiene coordenadas temporales y espaciales

Debería ser una referencia afín en un espaciotiempo de dimensión 4

Referencia en \mathbb{R}^4

$$R = \{O; B\}$$

$$O \in \mathbb{R}^4 \text{ origen}$$

$$B = \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \text{ base de } \mathbb{R}^4$$

$$\{v_1, v_2, v_3\} \text{ sistema ortonormal}$$

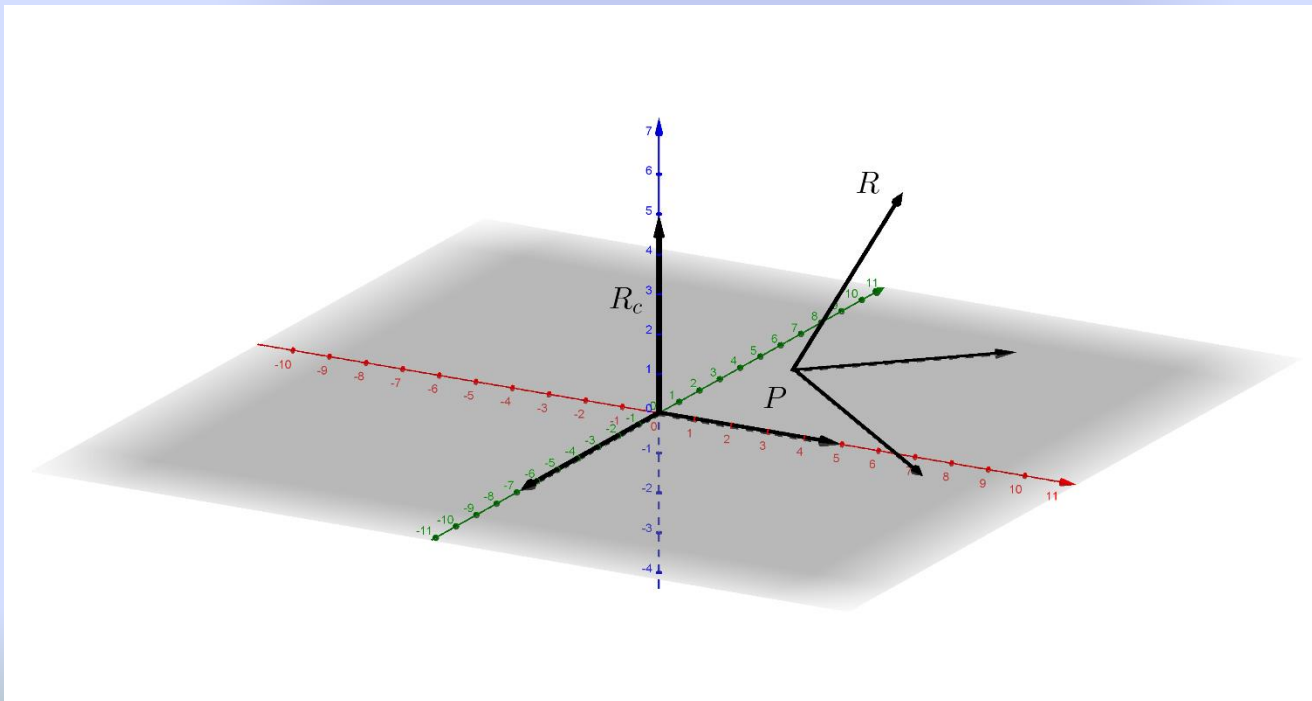
El tiempo es la primera coordenada

Las otras tres son dimensiones espaciales

Mecánica Newtoniana

1. Propiedades del medio

El observador sigue una línea hacia arriba llamada línea de universo
Se observa así mismo en $(t,0,0,0)$

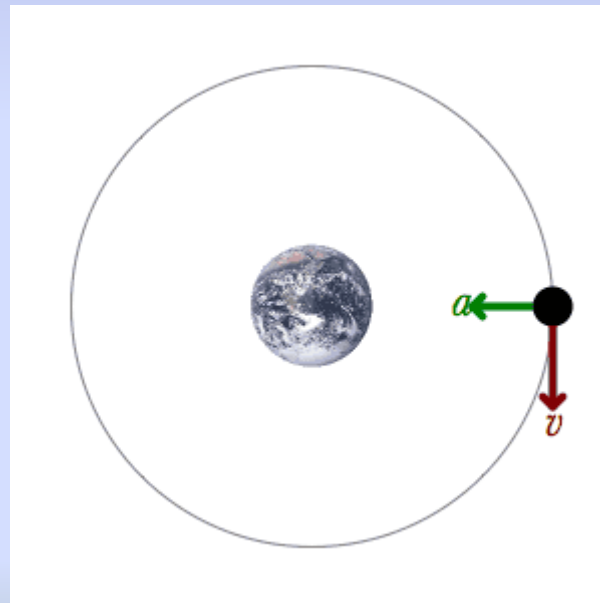


Mecánica Newtoniana

2. Propiedades del movimiento

Segunda necesidad inaplazable:

Las referencias se mueven



Wikimedia Commons

Mecánica Newtoniana

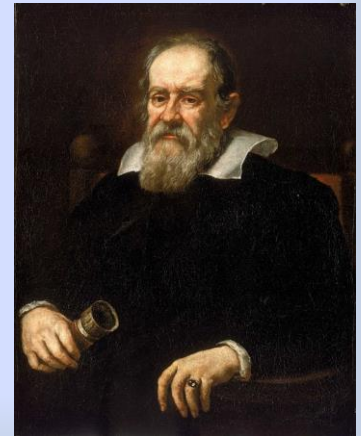
2. Propiedades del movimiento

Principio de relatividad de Galileo

Las leyes de la mecánica son las mismas en todas las referencias con movimientos relativos uniformes

Consecuencias Físicas

- Referencias Inerciales
- Final del Espacio absoluto



Galileo Galilei.
National Maritime Museum,
Greenwich, London

Mecánica Newtoniana

2. Propiedades del movimiento

Partícula inercial. No está sometida a ninguna fuerza

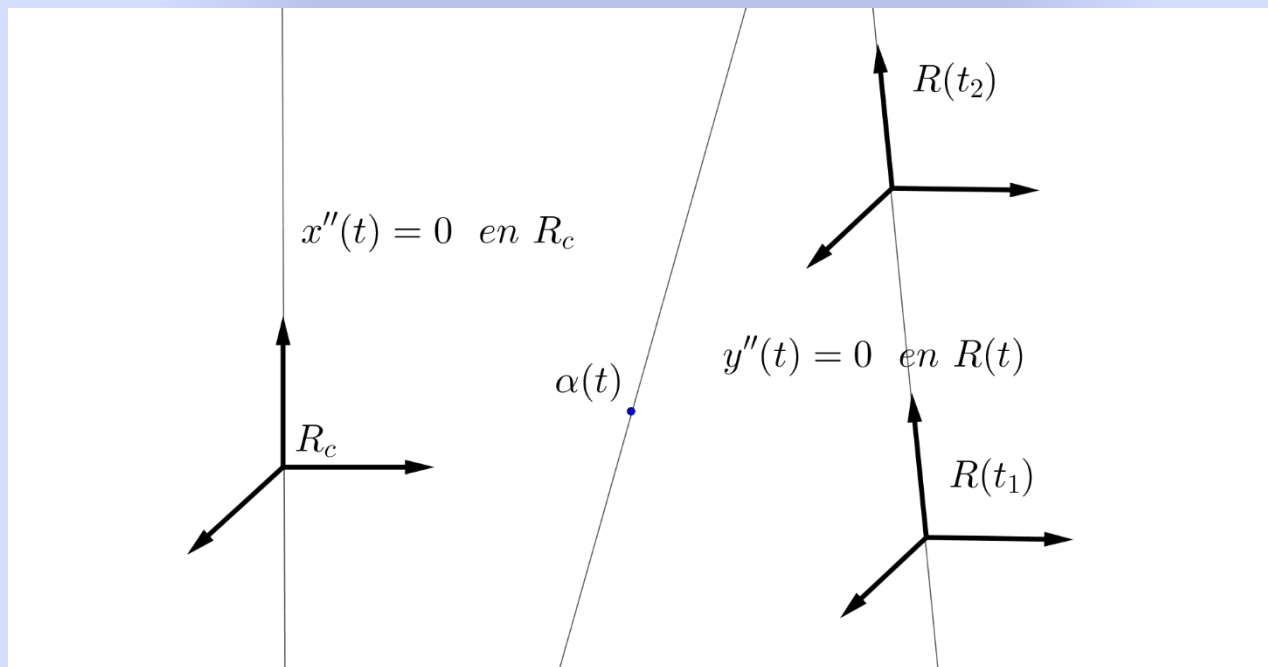
Leyes de Newton

- Ley de inercia. En las referencias inerciales, las partículas inerciales tienen trayectoria recta con velocidad uniforme
- Fuerza = masa x aceleración
- Toda acción tiene una reacción, en la misma dirección y sentido contrario

Mecánica Newtoniana

2. Propiedades del movimiento

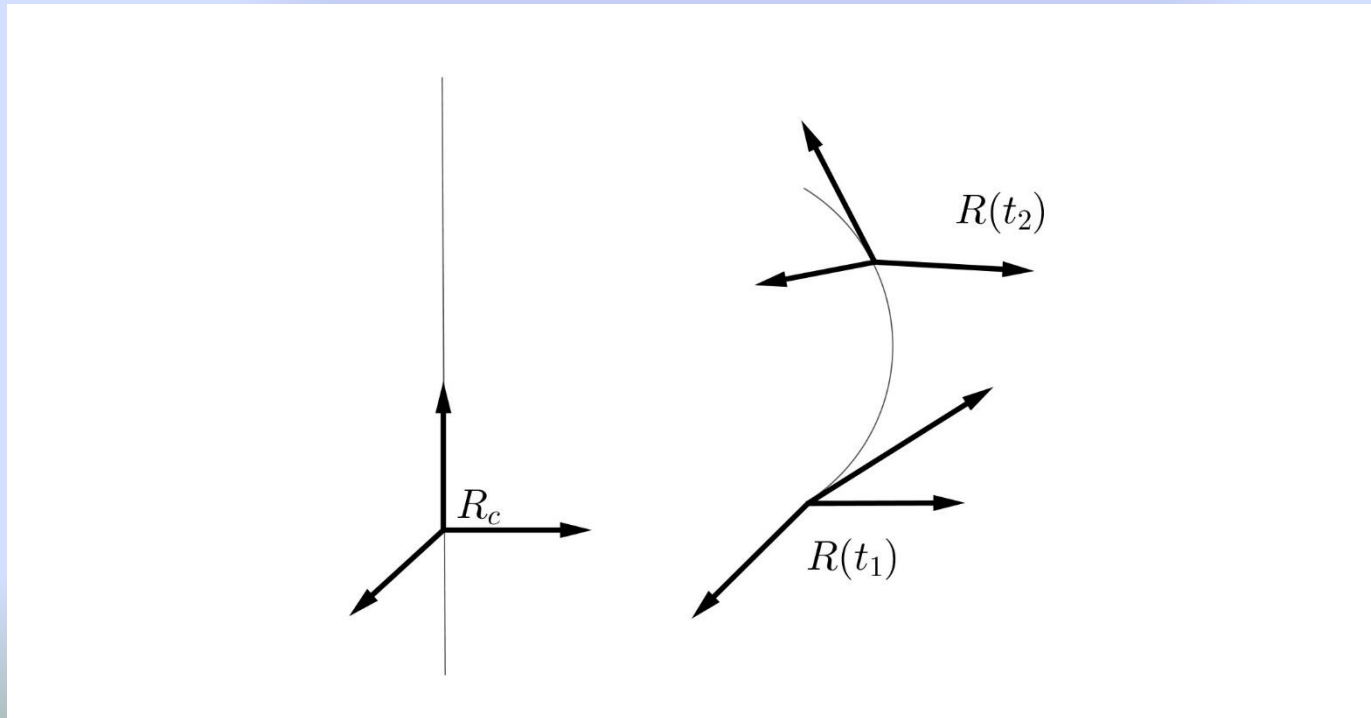
La referencia distinguida se toma inercial



Mecánica Newtoniana

2. Propiedades del movimiento

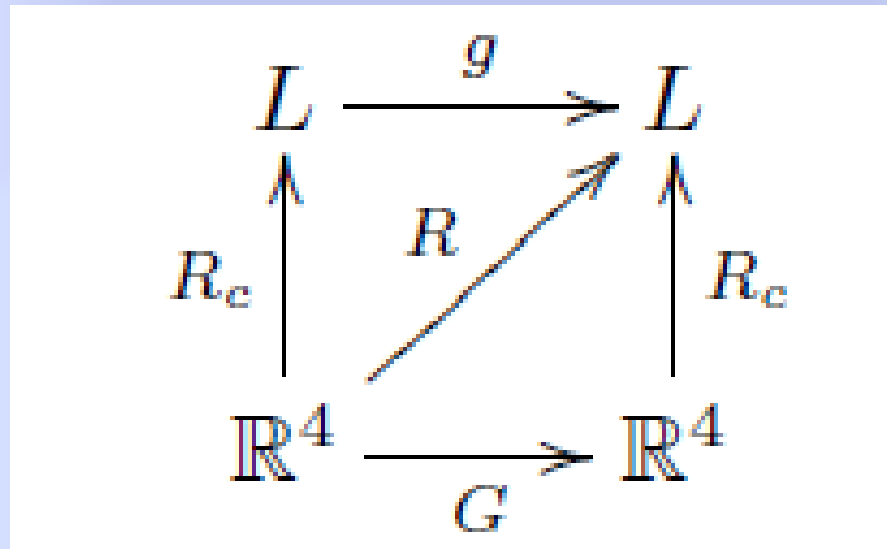
Una referencia no inercial tiene su origen con movimiento acelerado, o la parte espacial de su base girando



Mecánica Newtoniana

2. Propiedades del movimiento

Cualquier referencia inercial se obtiene a partir de la distinguida R_c con una transformación de Galileo



Las referencias Inerciales están parametrizadas por el Grupo de Galileo

Mecánica Newtoniana

2. Propiedades del movimiento

La transformación $g : L \rightarrow L$ en forma matricial relaciona las coordenadas de R con las de R_c

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 \\ c \end{pmatrix}$$

Se le llama transformación de Galileo. Forman el grupo de Galileo \mathcal{G} .

$$Isom(\delta) \leq Afín(\mathbb{R}^4)$$

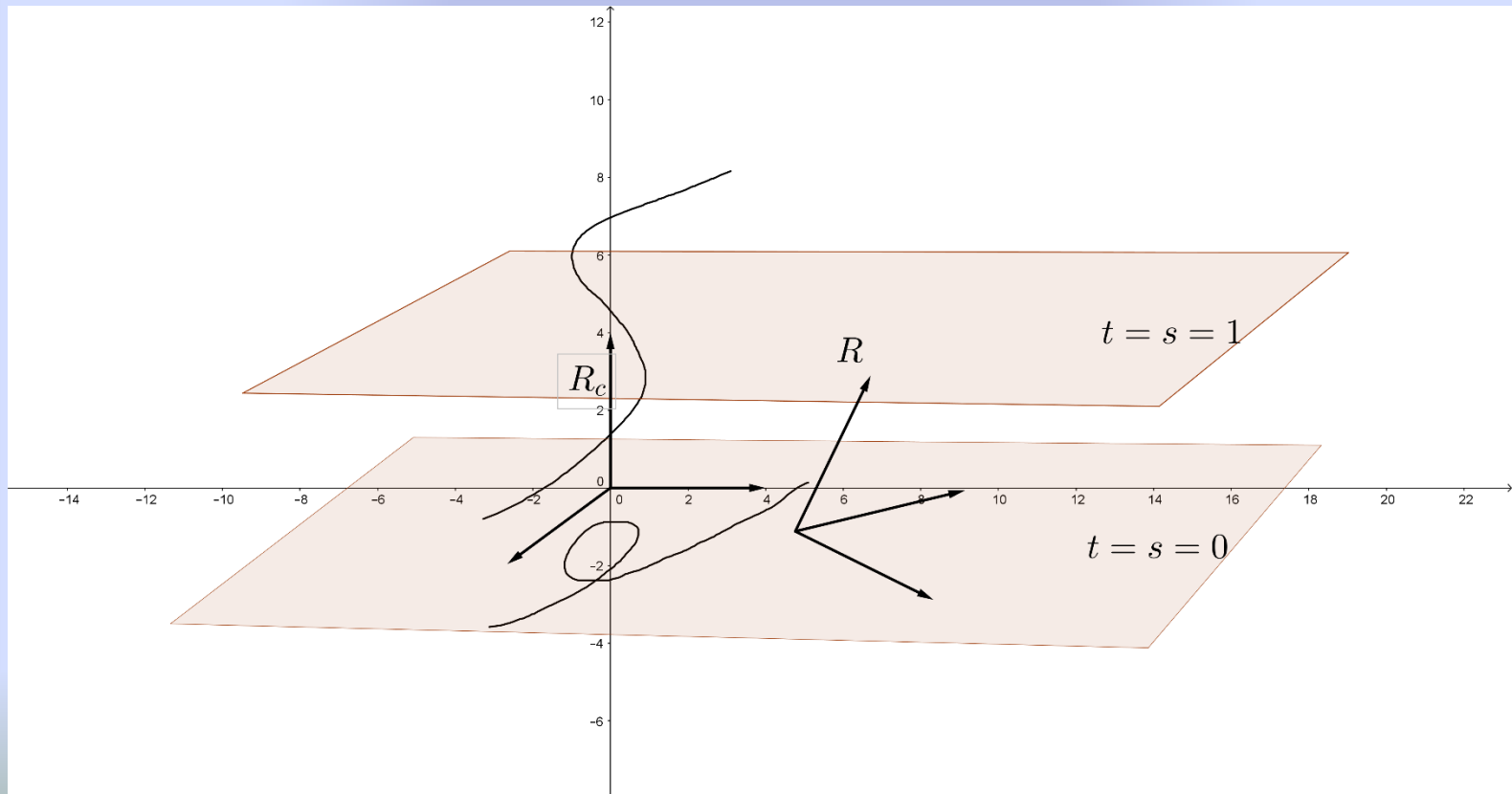
$$\mathcal{G} \leq Afín(\mathbb{R}^4)$$

Pero no hay relación entre $Isom(\delta)$ y \mathcal{G}

Mecánica Newtoniana

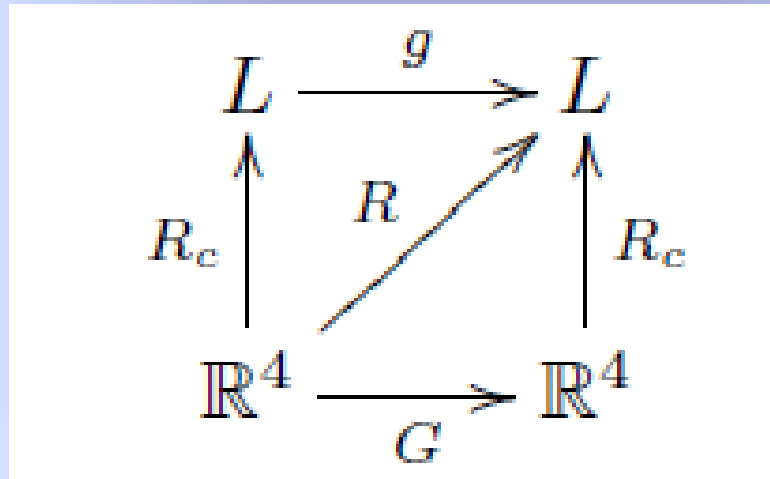
2. Propiedades del movimiento

Interpretación gráfica del espaciotiempo



Mecánica Newtoniana

2. Propiedades del movimiento



Principio de Relatividad de Galileo: Dos versiones equivalentes:

- Las leyes de la mecánica son las mismas en todas las referencias inerciales
- Las ecuaciones de la mecánica son invariantes por el Grupo de Galileo

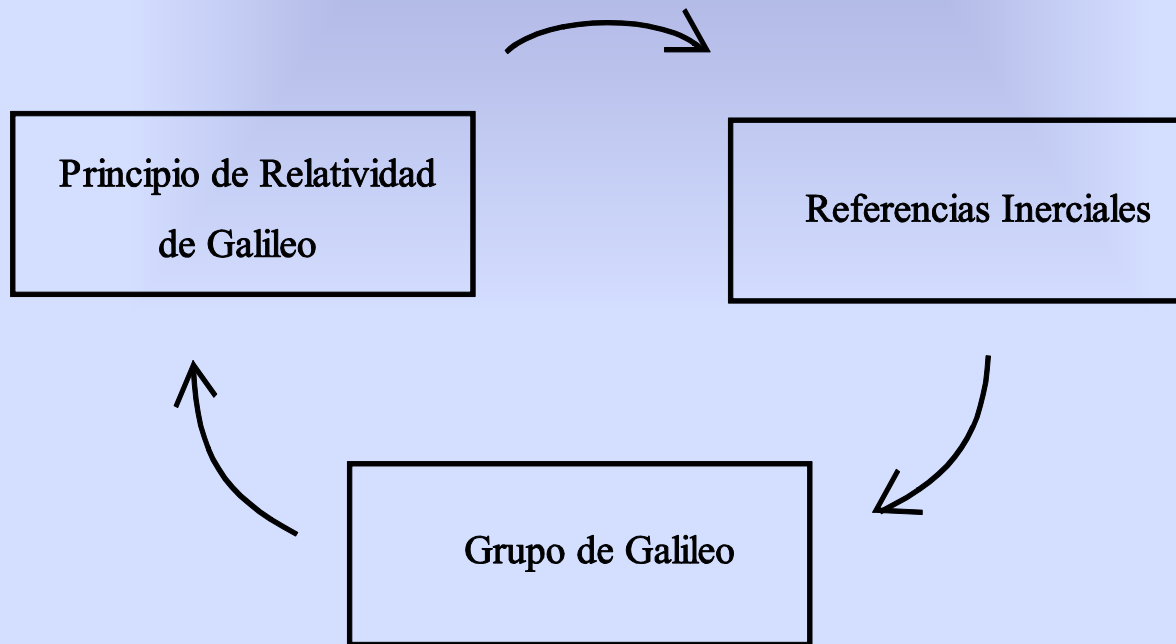
Mecánica Newtoniana

2. Propiedades del movimiento

Otras propiedades:

- Velocidades ilimitadas
- Ley de adicción de velocidades $v = v_1 + v_2$
- Velocidad de la luz finita
 - En el vacío $c = 299.792 \text{ Km/sg}$
 - 1676 Ole Rømer observando la órbita de Io sobre Júpiter

Mecánica Newtoniana



Mecánica Newtoniana

Todo iba bien hasta 1870-80. ¿Qué pasó entonces?

El deseo de universalizar el Principio de Relatividad de Galileo

Universalización del Principio de Relatividad de Galileo

- Las leyes **de la Física** son las mismas en todas las referencias inerciales
- Las ecuaciones **de la Física** son invariantes por el grupo de Galileo

Mecánica Newtoniana

Propiedades de la luz

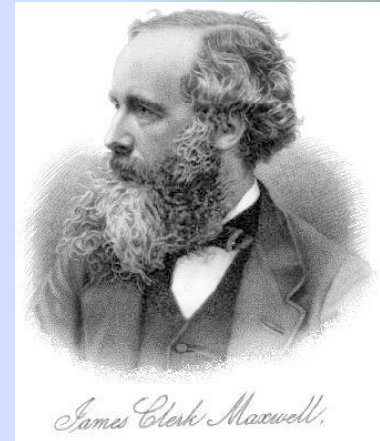
Dos tipos de observaciones

- Astronómicas

- Ocultación de Satélites de Saturno
- Aberración estelar
- Velocidad de la luz en el vacío $c = 299.792 \text{ Km/sg}$

- Electromagnetismo

- Velocidad de la luz en el vacío $c = 299.792 \text{ Km/sg}$
- c se deduce de otras constantes de la naturaleza
- En todas las referencias inerciales



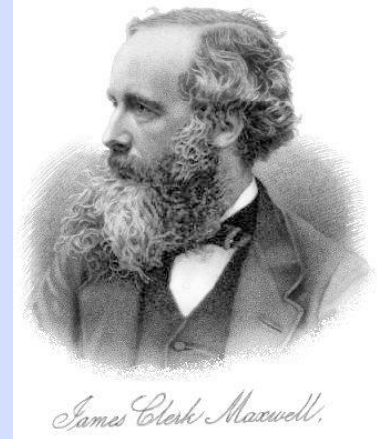
G. J. Stodart from a photograph
by Fergus of Greenock

Mecánica Newtoniana

Propiedades de la luz

Dos tipos de observaciones

- Astronómicas
 - Ocultación de Satélites de Saturno
 - Aberración estelar
 - Velocidad de la luz en el vacío $c = 299.792 \text{ Km/sg}$
- Electromagnetismo



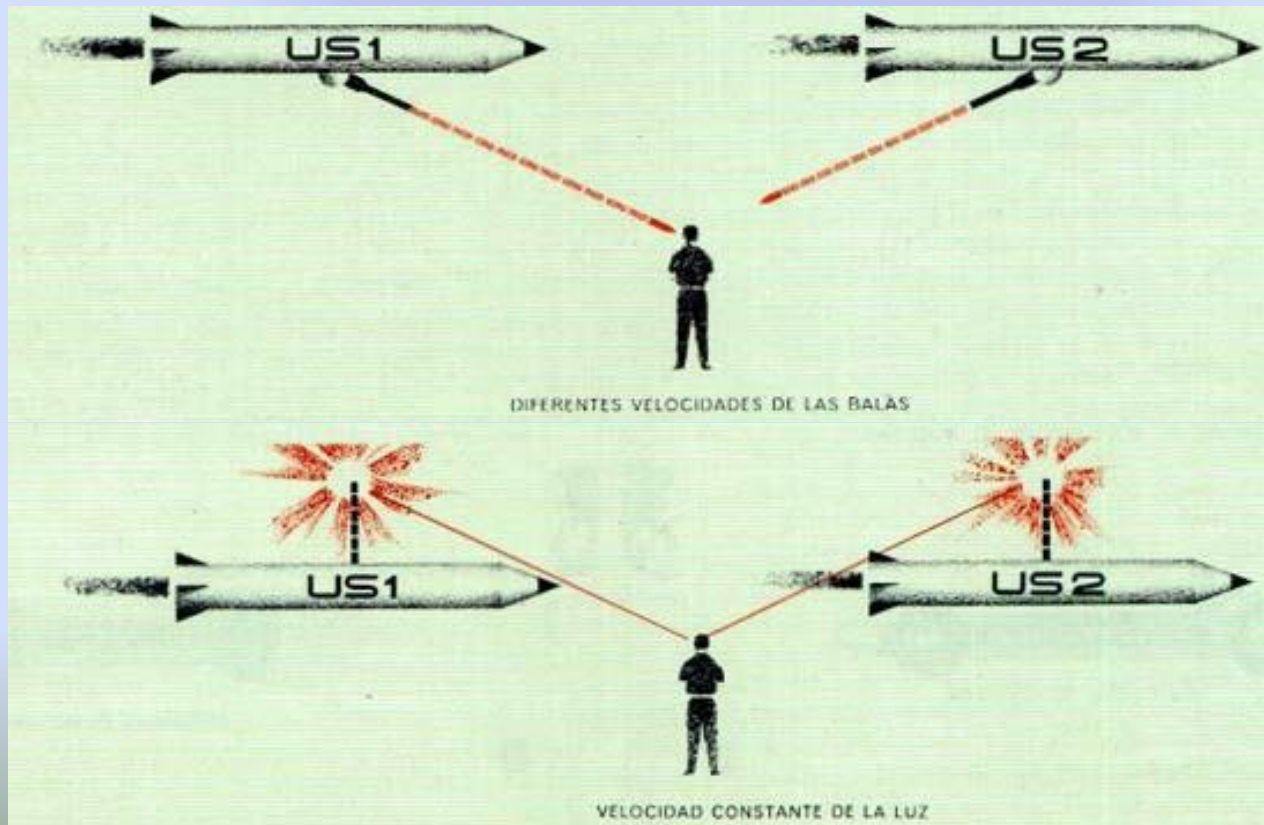
G. J. Stodart from a photograph
by Fergus of Greenock

¡En todas las referencias Inerciales!

Mecánica Newtoniana

Propiedades de la luz

Contradice la ley de adición de velocidades de la mecánica de Newton

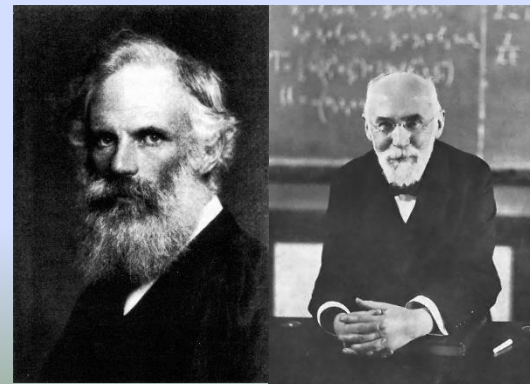


Mecánica Newtoniana

Propiedades de la luz

Periodo de CRISIS 1880-1905

- Intentos de explicarlo
 - Introducción del Éter
 - Experimento de Michelson-Morley, 1887
 - Explicación de FitzGerald-Lorentz. (El espacio se contrae en la dirección del movimiento relativo respecto al Éter)



Mecánica Newtoniana

Propiedades de la luz

Periodo de CRISIS 1880-1905

Lorentz dedujo que las ondas no son las mismas en todas las referencias inerciales

Ecuación de ondas

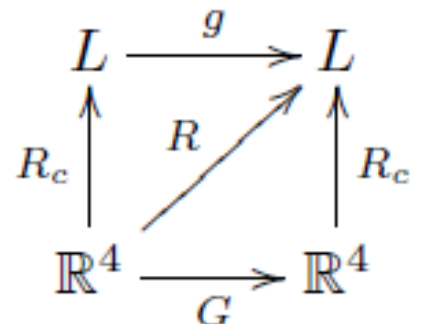
$$-\frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{d^2 f}{dx_1^2} + \frac{d^2 f}{dx_2^2} + \frac{d^2 f}{dx_3^2} = 0$$

no es invariante por el grupo de Galileo

Lorentz descubrió que era invariante por otro grupo

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c^2} \\ v & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix}$$

con $A \in O(3)$, hoy día llamado grupo de Lorentz.



Mecánica Newtoniana

Propiedades de la luz

Periodo de CRISIS 1880-1905

Bajo una transformación de Lorentz, los tiempos se relacionan por

$$t = \frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}} (s + \frac{v}{c^2} y)$$

en lugar de

$$t = s + c_0.$$

Fue inmediatamente descartado. “Es sólo un
artificio Matemático sin ningún sentido Físico.”

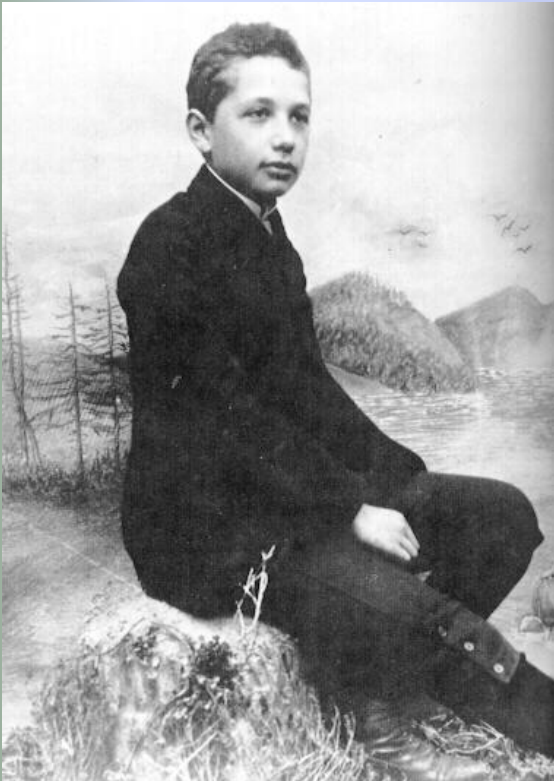
Mecánica Newtoniana

Periodo de Crisis 1880-1905

Las tres ideas que siguen no son ciertas a la vez

- Principio de Relatividad Universalizada
- Electromagnetismo
- Mecánica Newtoniana

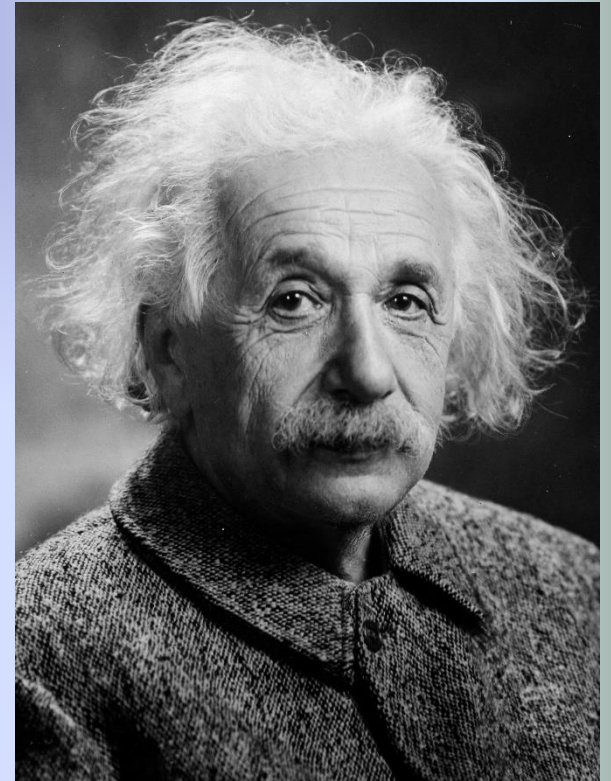
Fin de la crisis. 1905



Wikipedia



Wikipedia



Wikipedia

Relatividad Especial

Crisis: Las tres ideas no son ciertas a la vez

- Principio de Relatividad Universalizada
- Electromagnetismo
- Mecánica Newtoniana

Einstein confiaba en el electromagnetismo y en la universalización del principio de relatividad de Galileo

Se propuso revisar la Mecánica Newtoniana
(tenía 25 años)

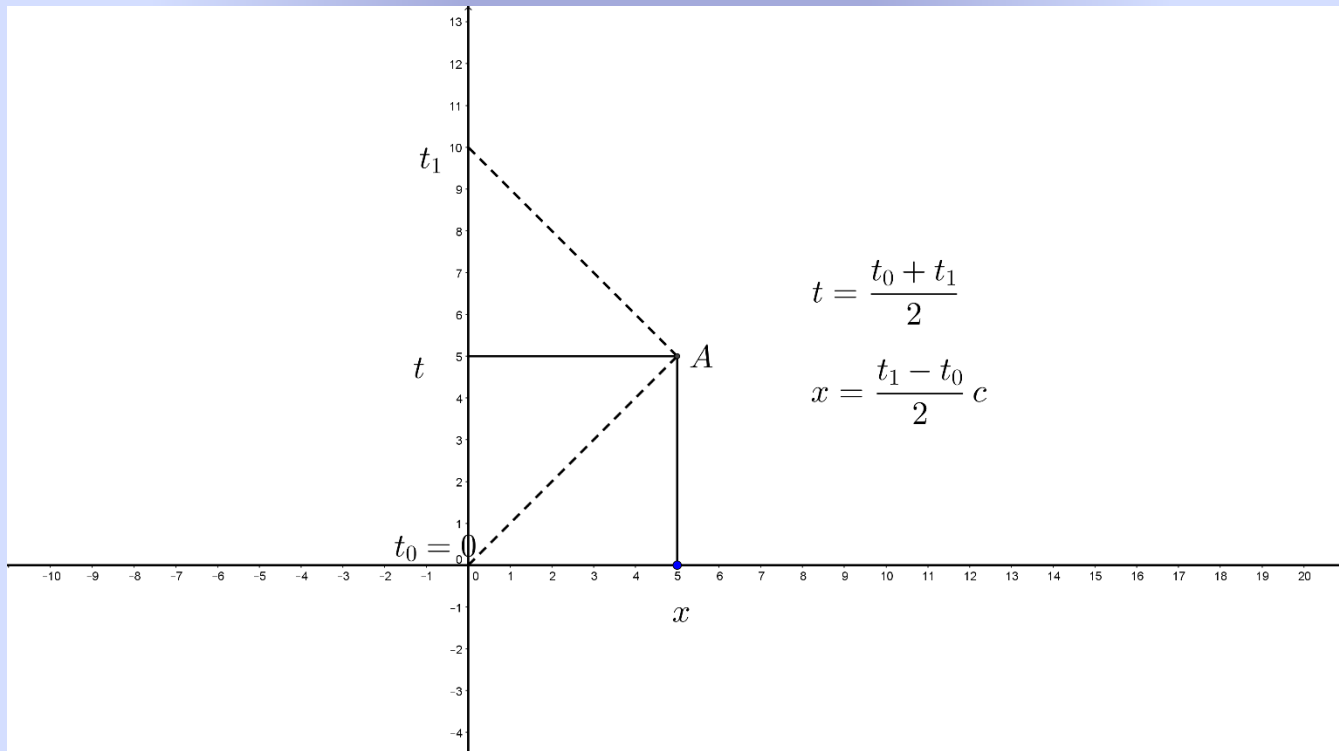
Relatividad Especial

Propuso revisar el proceso de medir respetando los siguientes principios:

- Principio de Relatividad Especial (Relatividad Universalizada)
- Constancia de la velocidad de la luz

Relatividad Especial

Proceso de medir: Mediante señales radar que sólo usa la luz



- Coincide con las coordenadas afines
- Hay un aparato laser para medir distancias.
Se vende en ferreterías

Relatividad Especial

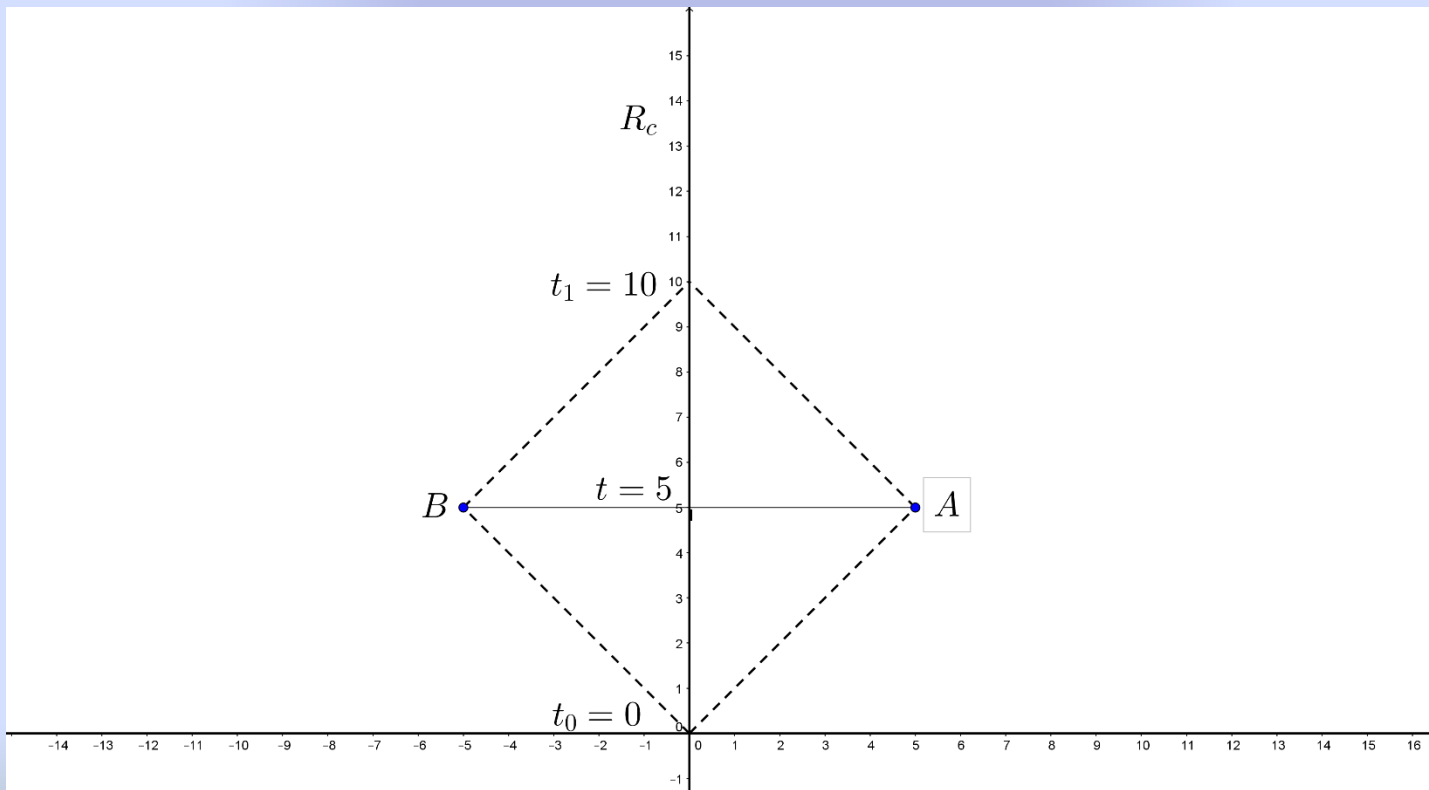
Aviso importante

- Si aceptas esta forma de medir, acabas de abandonar la Mecánica Newtoniana y te has convertido a la Mecánica Relativista
- A partir de ahora se aplicará la lógica y las Matemáticas a pesar de que los resultados desafían al sentido común y a la Física de la época

Relatividad Especial

Efectos relativistas

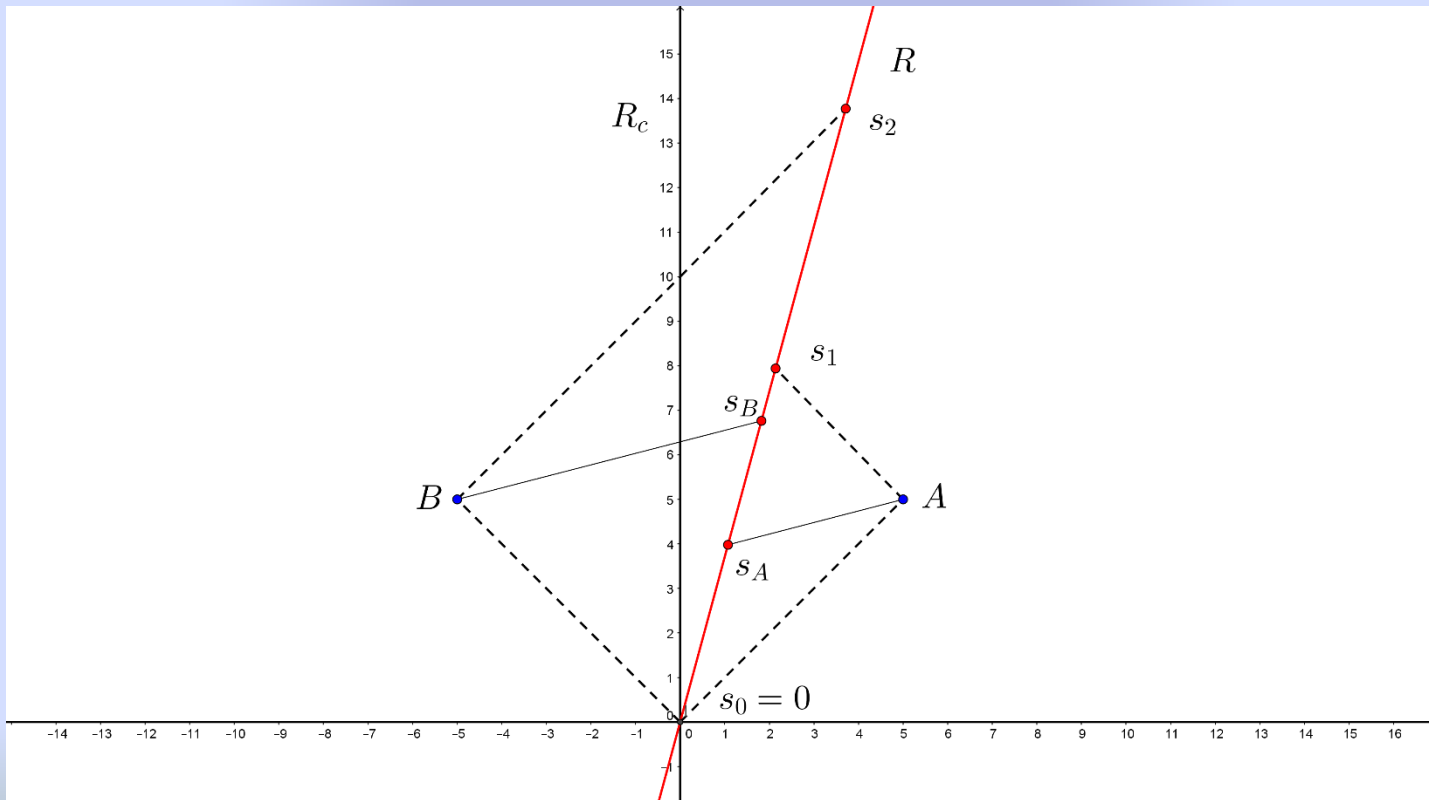
E1: La simultaneidad es relativa



Relatividad Especial

Efectos relativistas

E1: La simultaneidad es relativa

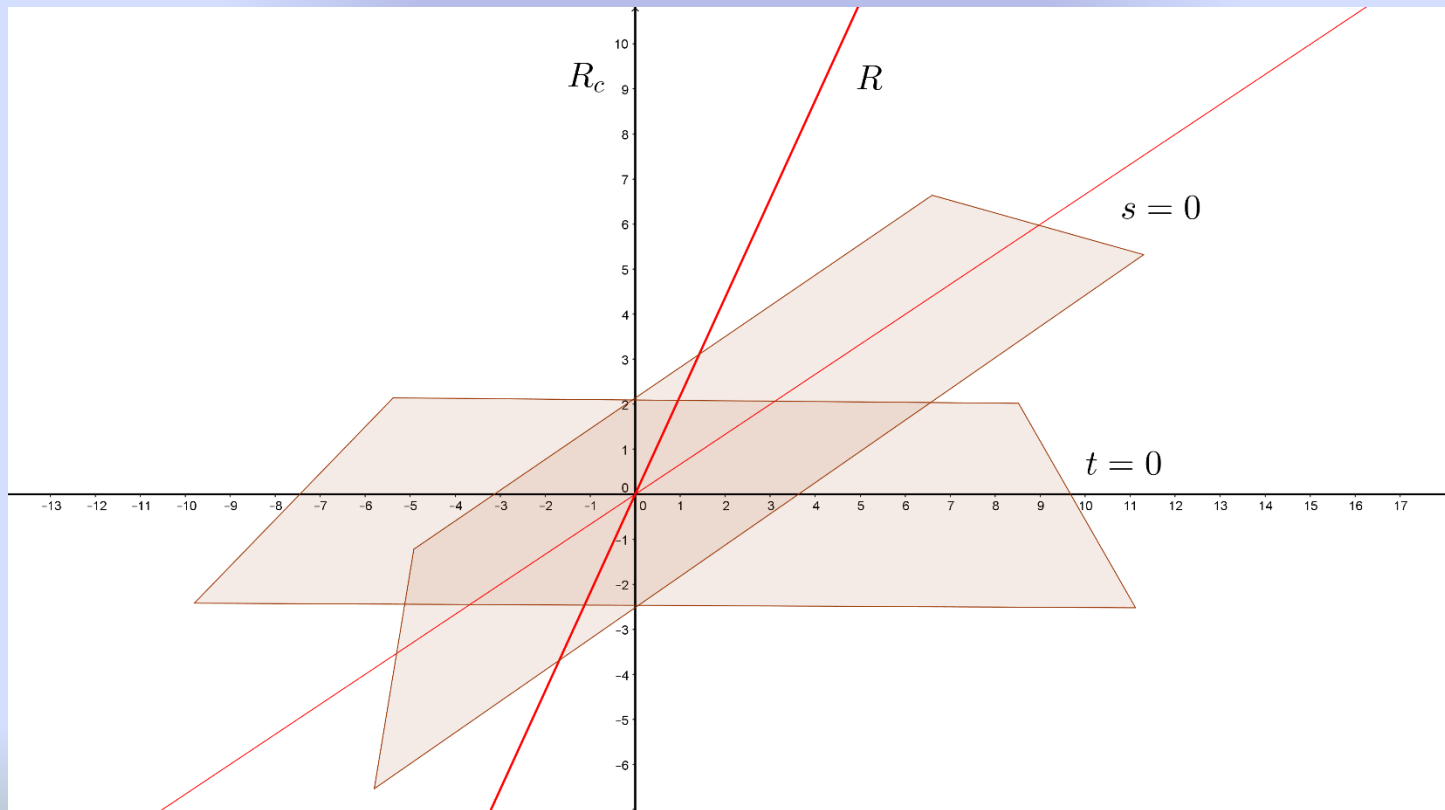


El tiempo no es absoluto. Depende del observador³⁵

Relatividad Especial

Efectos relativistas

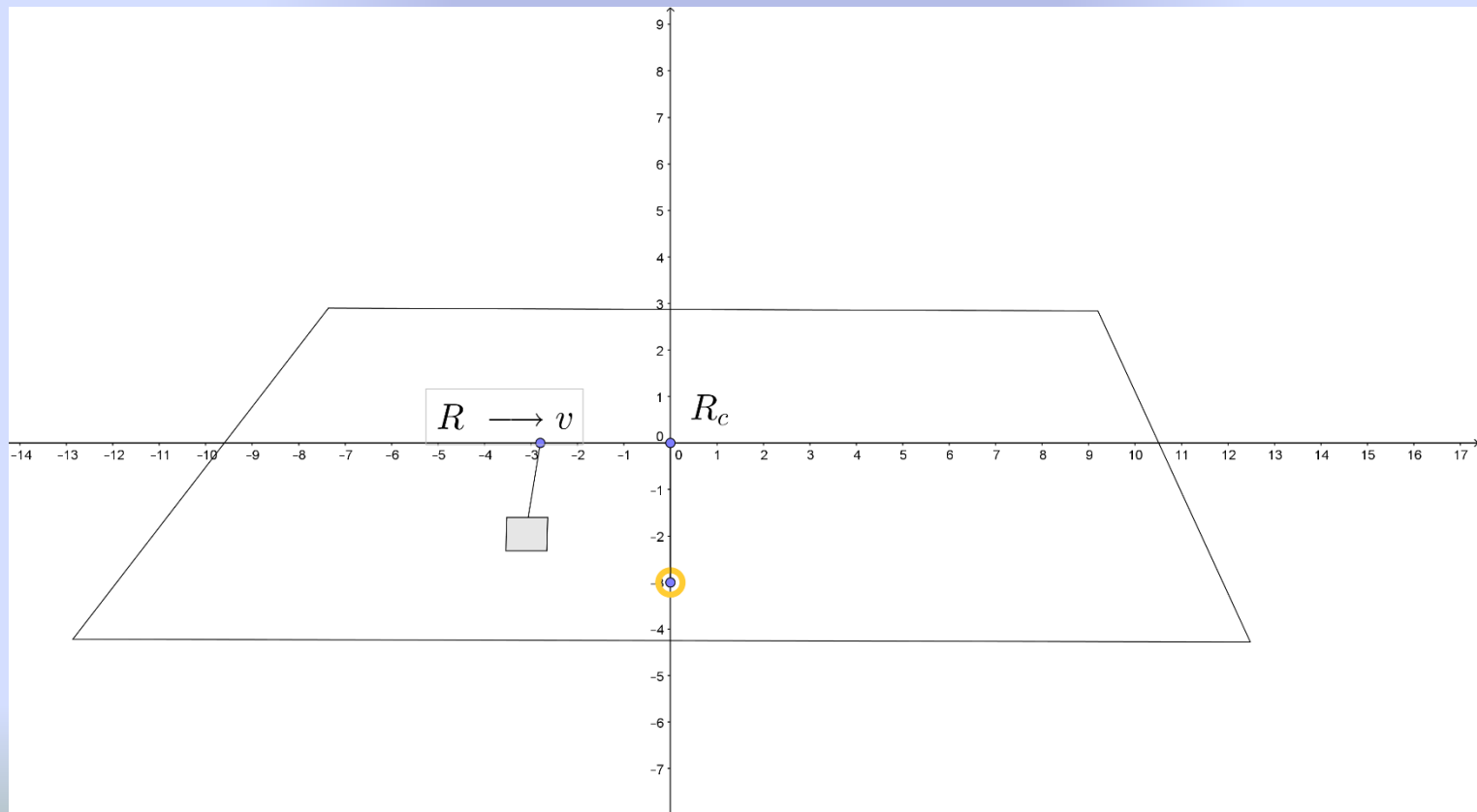
Hiperplanos de simultaneidad



Relatividad Especial

Efectos relativistas

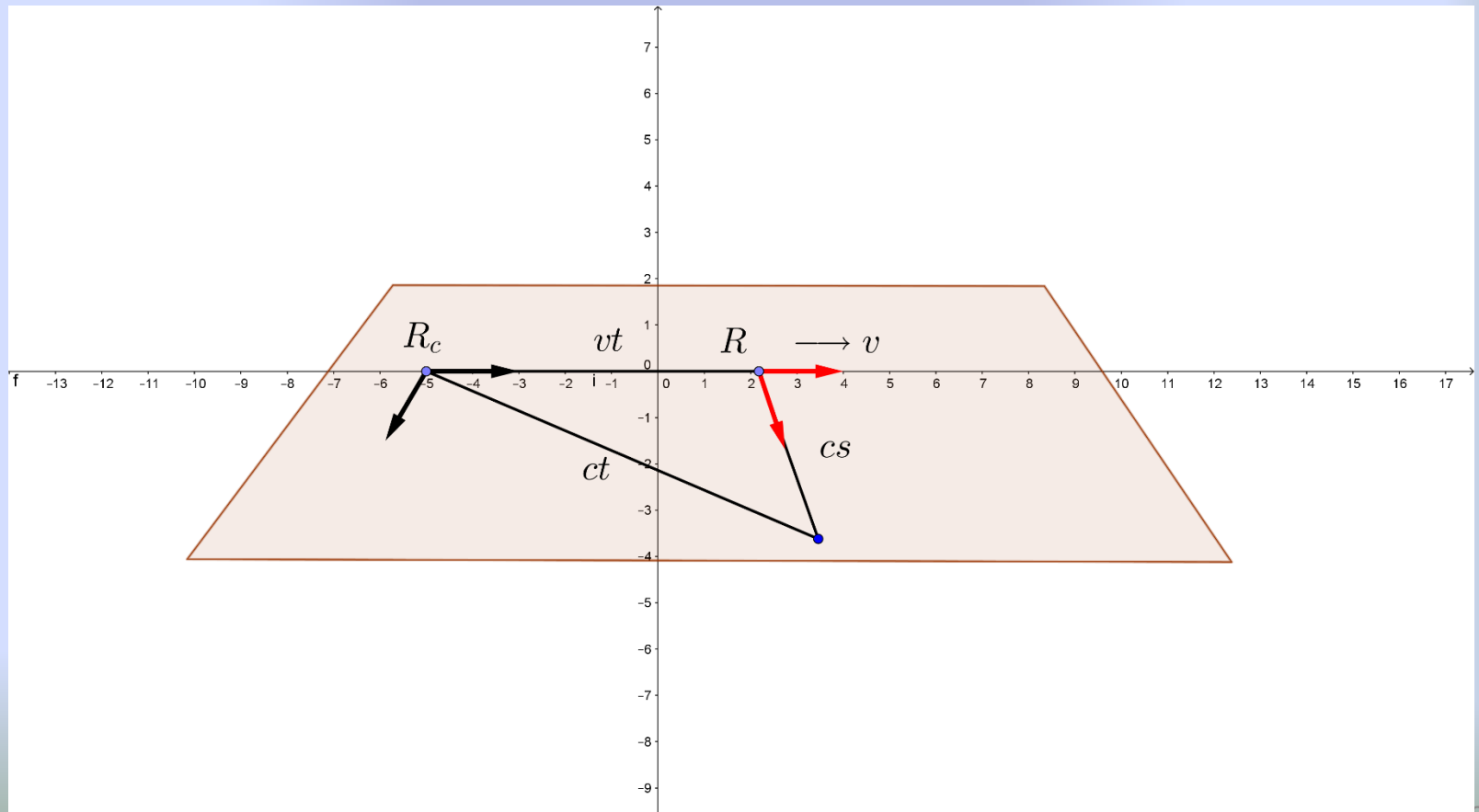
En dirección ortogonal al movimiento ambas referencias miden la misma longitud



Relatividad Especial

Efectos relativistas

Observación que hace R_c en su laboratorio



Relatividad Especial

Efectos relativistas

E2: Dilatación del tiempo

La observación que hace R_c es

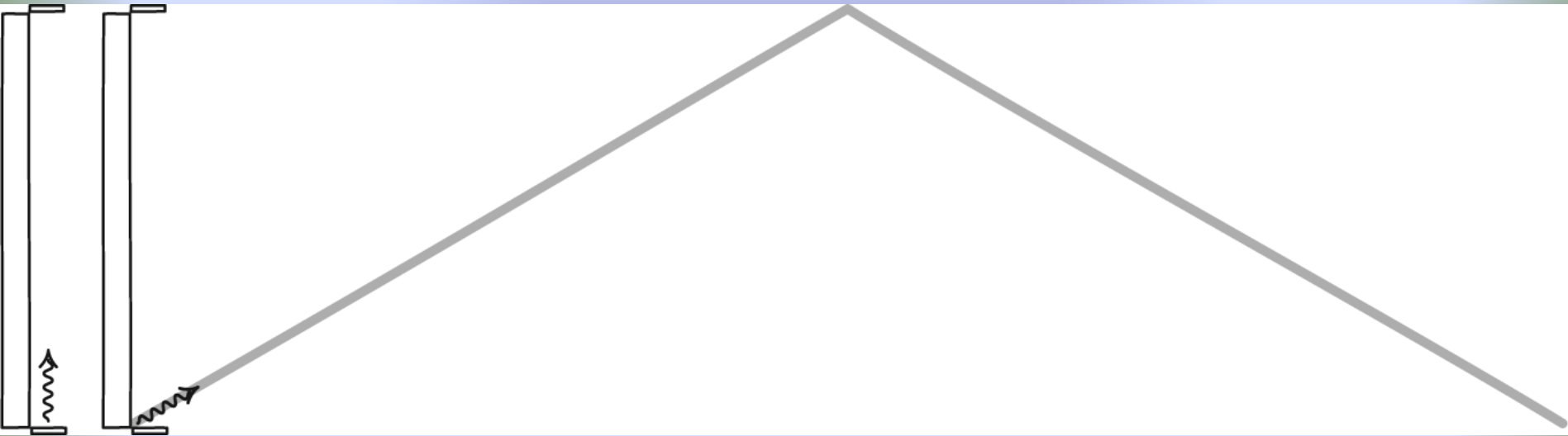
$$c^2 t^2 = v^2 t^2 + c^2 s^2,$$

$$t = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} s = \gamma s \geq s$$

Relatividad Especial

Efectos relativistas

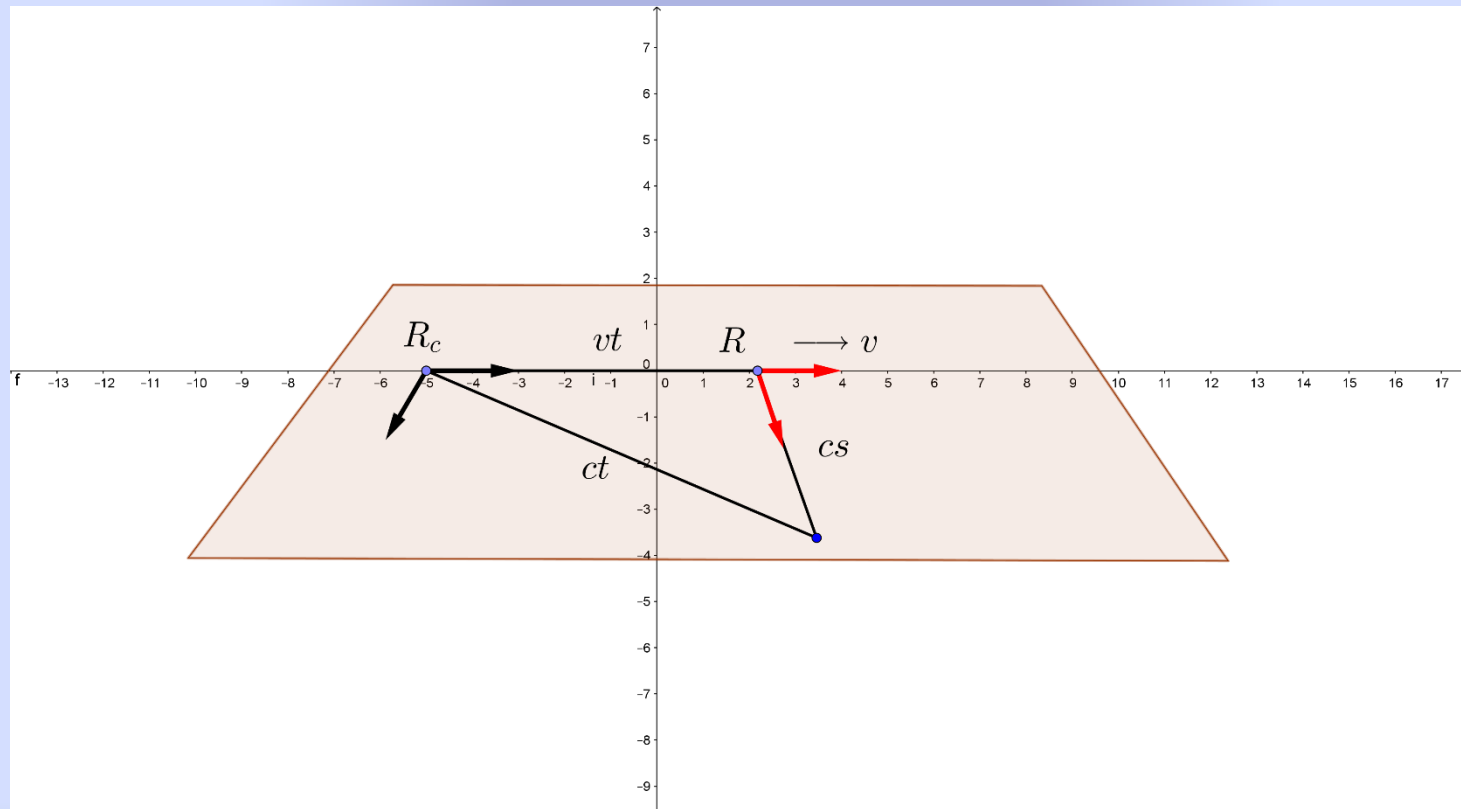
E2: Dilatación del tiempo



Relatividad Especial

Efectos relativistas

E3: Velocidades limitadas por c



La velocidad relativa de cualquier partícula siempre es menor estrictamente que la de la luz⁴¹

Relatividad Especial

Efectos relativistas

Grupo de Poincaré

Según el observador R_c

La relación que R_c observa entre sus coordenadas y las de otra referencia inercial es

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c^2} \\ v & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_0 \\ a \end{pmatrix}$$

con $A \in O(3)$, justo una transformación de Lorentz mas una traslación en \mathbb{R}^4

Forman un grupo llamado Grupo de Poincaré

A velocidades bajas, se reproduce el Grupo de Galileo

Relatividad Especial

Espacio de Minkowski

Tomando velocidad de la luz $c=1$



Wikipedia

El grupo de Poincaré (Lorentz mas traslaciones) es el grupo de isometrías afines del espacio de Minkowski (\mathbb{R}^4, η) siendo

$$\eta(x, y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Relatividad Especial

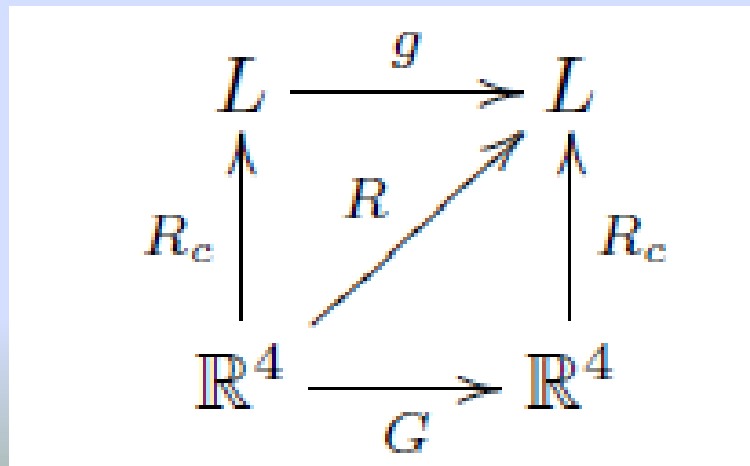
Espacio de Minkowski

Ahora las simetrías del modelo se codifican con el Espacio afín de Minkowski

$$Isom(\mathbb{R}^4, \eta) = \mathcal{P} \leq Afín(\mathbb{R}^4)$$

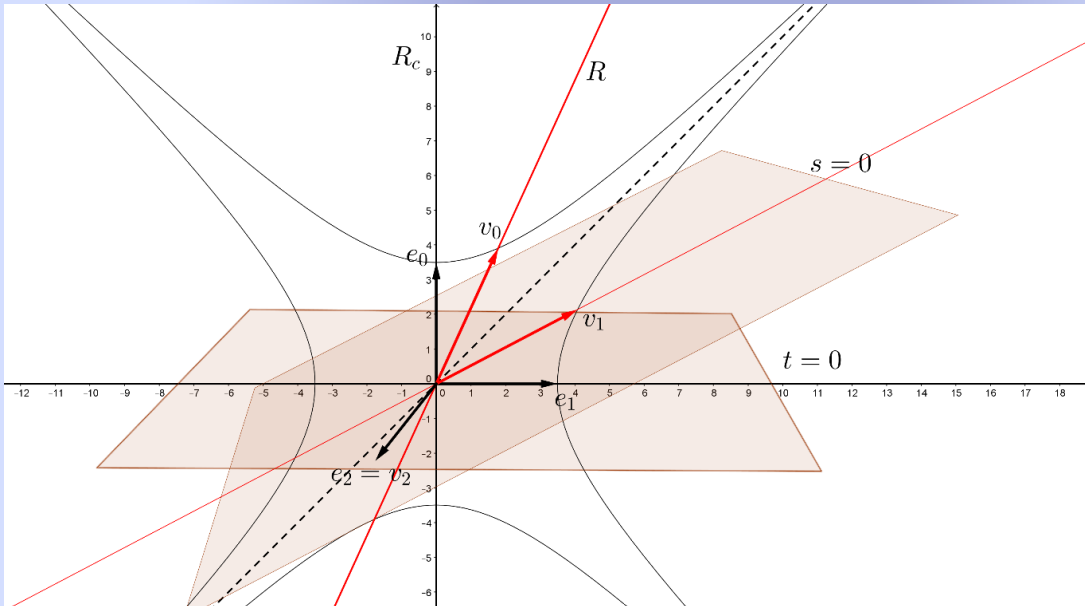
y el Grupo de Poincaré \mathcal{P} es el grupo de las isometrías del modelo.

Las referencias inerciales están parametrizadas por el Grupo de Poincaré



Relatividad Especial

Espacio de Minkowski

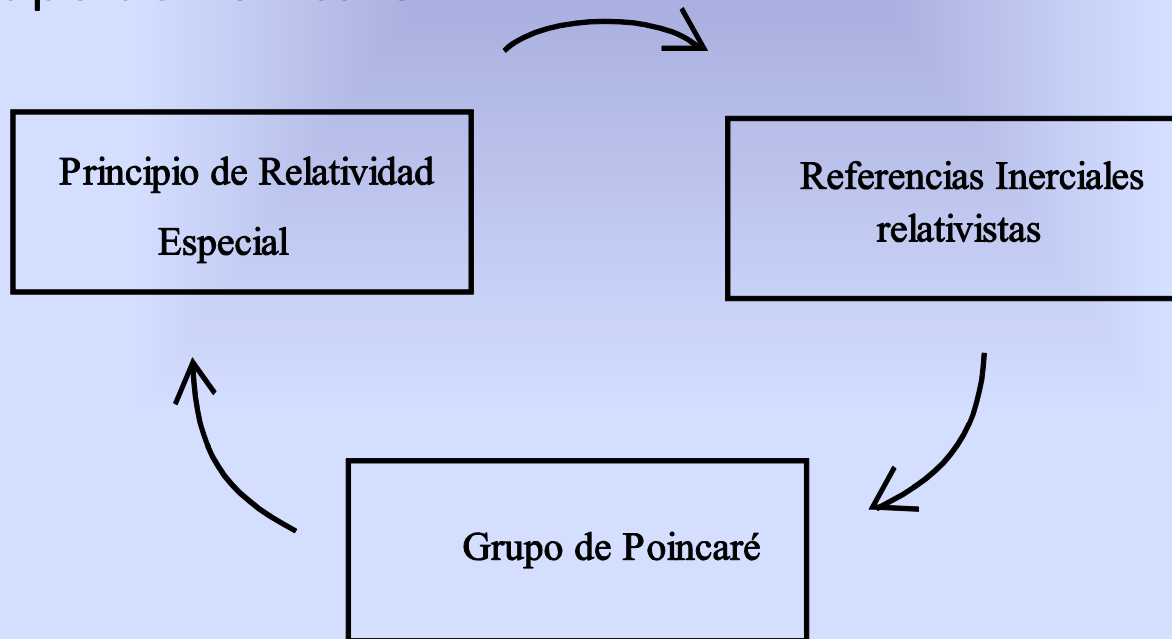


- Espacio-tiempo es una entidad única
- Hiperplano de simultaneidad es ortogonal al eje del tiempo. Y euclídeo.
- Cada observador inercial la desacopla en espacio y tiempo

$$\mathbb{R}^4 = L(e_0) \oplus e_0^\perp$$

Relatividad Especial

Las referencias inerciales están parametrizadas por el grupo de Poincaré



Principio de Relatividad Especial:

Las leyes de la Física son las mismas en todas las referencias inerciales

Las ecuaciones de la Física son invariantes por el grupo de Poincaré

Relatividad Especial

Efectos relativistas

E4: Ley de adición de velocidades relativistas

La referencia distinguida R_c puede deducir la velocidad de una partícula que lleva velocidad u visto por otra referencia inercial R .

Para R_c , la transformación de Lorentz que relaciona las coordenadas es

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c^2} \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ us \end{pmatrix}$$

identificando componentes

$$t = \gamma \left(1 + \frac{uv}{c^2} \right) s$$

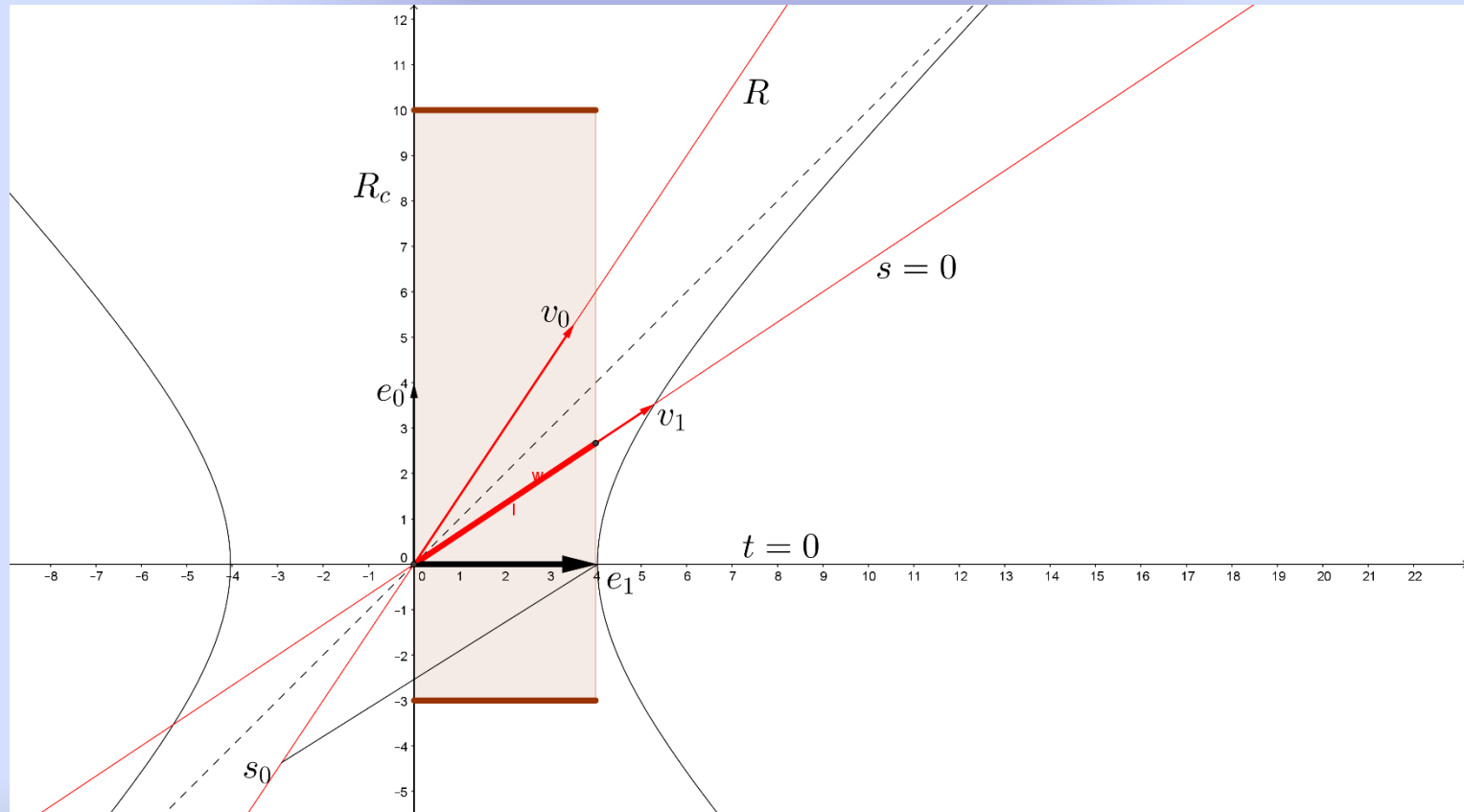
$$x = \gamma(u + v)s$$

por tanto, la velocidad de la partícula para R_c es

$$w = \frac{x}{t} = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

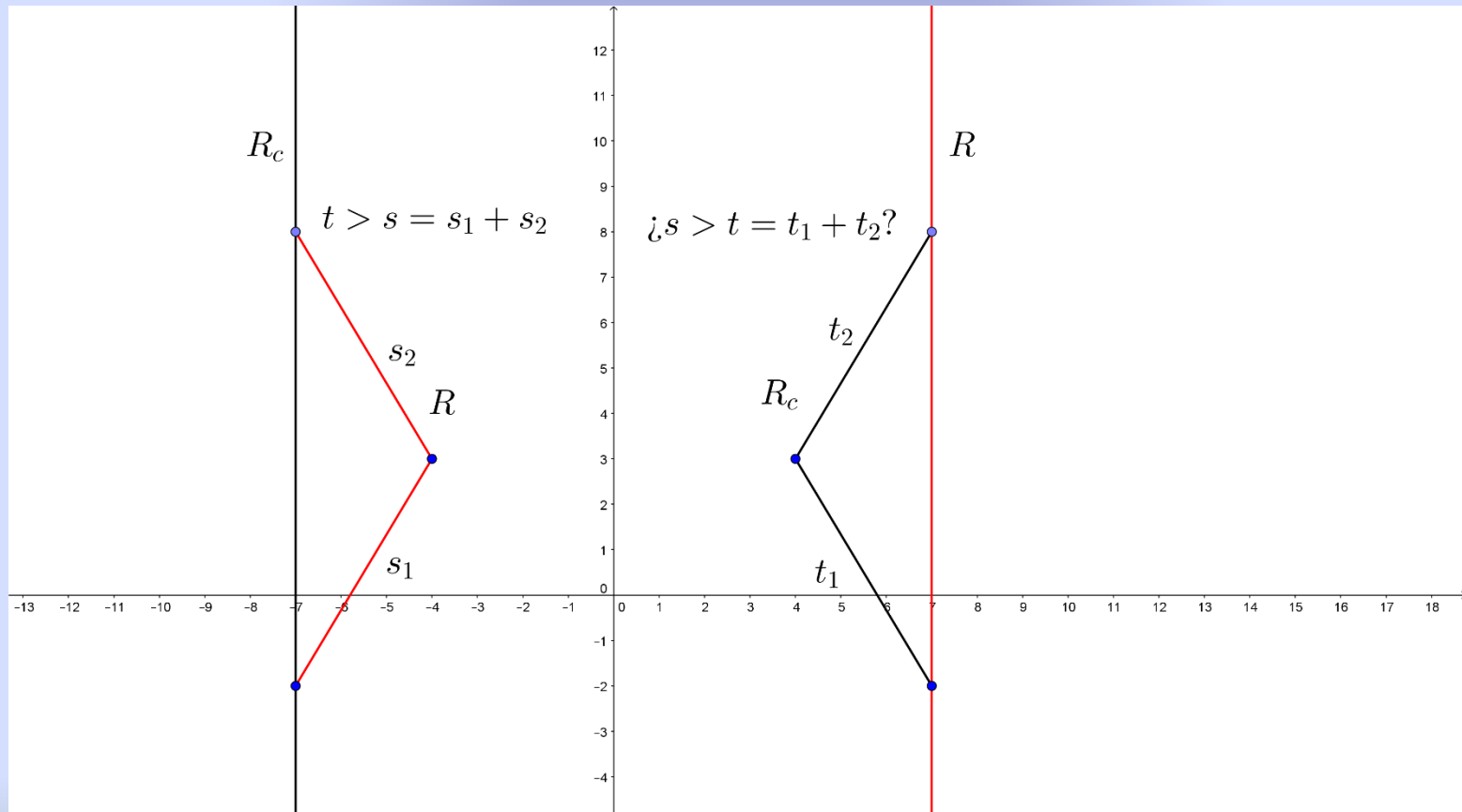
Relatividad Especial

E5: Contracción de Lorentz-FitzGerald



Relatividad Especial

E6: Paradoja de los Gemelos



Relatividad Especial

E6: Paradoja de los Gemelos

La referencia inercial R_c descompone $\mathbb{R}^4 = L(e_0) \oplus e_0^\perp$ y le permite deducir que el tiempo s de un observador acelerado se relaciona con el suyo por

$$t'(s) = \gamma_{v(s)} \geq 1$$

En esa situación los tiempos del viaje para el observador acelerado y para R_c verifican

$$s = \int_0^s ds < \int_0^s t'(s) ds = t(s) - t(0) = t$$

El mismo cálculo no es posible para el observador acelerado por que al no ser inercial no puede hacer la descomposición análoga de \mathbb{R}^4 y no tiene a su disposición la relación de tiempos usada por R_c .

Relatividad Especial

E7: Equivalencia masa-energía

Un observador inercial R_c en el espacio tiempo ve una partícula α . Le asigna un 4-momento

$$\begin{aligned} P(t) &= m\alpha'(t) \in \mathbb{R}^4 \\ &= m\gamma ce_0 + m\gamma\alpha'_0(t) \in L(e_0) \oplus e_0^\perp \end{aligned}$$

el factor γ aparece al cambiar el tiempo de la partícula por el del observador vía la relación

$$t'(s) = \gamma_{v(s)}$$

Hay un término nuevo $m\gamma$. Desarrollando $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ en serie de potencias queda

$$m\gamma = m + \frac{1}{2} \frac{mv^2}{c^2} + \dots$$

Relatividad Especial

E7: Equivalencia masa-energía

Entonces

$$E = mc^2\gamma \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

es una energía.

En particular, la energía de una partícula en reposo es

$$E = mc^2$$

La energía en reposo de un cuerpo es 6.5 billones de veces mayor que su energía cinética a 300 Km/h.

Se necesita infinita energía para alcanzar la velocidad de la luz

Relatividad Especial

Hay innumerables experimentos que confirman las predicciones de la Relatividad Especial

- Todos los laboratorios de Física de partículas
- Energía Atómica
 - Armamento nuclear
 - De fisión (Centrales nucleares actuales)
 - De fusión (Centrales nucleares futuras)

Relatividad Especial

Antonio Varias, *in memoriam*



TJ-II PROJECT: A FLEXIBLE HELIAC STELLARATOR

CARLOS ALEJALDRE, JOSE JAVIER ALONSO GOZALO,
JOSE BOTIJA PEREZ, FRANCISCO CASTEJÓN MAGAÑA,
JOSE RAMON CEPERO DIAZ, JOSE GUASP PEREZ,
A. LOPEZ-FRAGUAS, LUIS GARCÍA,* VLADIMIR I. KRIVENSKI,
R. MARTÍN, A. P. NAVARRO, ANGEL PEREA,
ANTONIO RODRIGUEZ-YUNTA, MARIO SOROLLA AYZA,
and ANTONIO VARIAS *Asociación EURATOM/CIEMAT para Fusión*
28040 Madrid, Spain

